ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

«АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ»

Выполнил студент
443 группы
Медведев Алексей Сергеевич

____
подпись студента

Научный руководитель:
ак. РАН, д.ф.-м.н., профессор
Рубаков Валерий Анатольевич

____
подпись научного руководителя

Научный консультант:
к.ф.-м.н., с.н.с. ОТФ ИЯИ РАН
Демидов Сергей Владимирович

____
подпись научного консультанта

Допущена к защите
Зав. кафедрой ______________________
подпись зав. кафедрой

МОСКВА

2021

Оглавление

1. Введение

Как известно, одной из основных задач, которую решает Квантовая Теория Поля является расчёт вероятностей и связанных с ними сечений и времен жизни частиц для различных типов процессов, например, сечение комптоновского рассеяния в КЭД. Первым и одним из самых трудоемких шагов на пути к вычислению вероятностей является расчет квантово-механических амплитуд взаимодействия, или матричных элементов S-матрицы. Обычно такие вычисления проводятся в теории возмущений с помощью правил Фейнмана.

В данной работе обсуждается немного иной подход к вычислению амплитуд рассеяния в многочастичных процессах, по сравнению с изложенным выше. Для анализа амплитуд используется редукционная формула Лемана-Симанчика-Циммермана (ЛСЦ). Эта формула является прекрасным теоретико-полевым результатом, связывающим амплитуды рассеяния и функции Грина, которые можно искать по теории возмущений. Она была впервые опубликована немецкими учеными в 1955 году [1].

Выписывая редукционную формулу для процессов многочастичного рождения, можно заметить, что амплитуды таких процессов связаны с решениями уравнений движения. В древесном приближении такие уравнения будут просто совпадать с классическими уравнениями движения для рассматриваемого поля при наличии источника. По итогу, оказывается, что решения этих уравнений являются производящими функциями для амплитуд рассеяния, находить которые, можно прямым дифференцированием этого решения.

Впервые данная техника была предложена в статье [2] для вычисления амплитуд $1 \to n$ в теории ϕ^4 с нарушенной и ненарушенной $\mathbb{Z}_2$ симметрией в древесном приближении на кинематическом пороге реакции. Далее в работах [3–7] были рассмотрены и петлевые поправки для $1 \to n$ на пороге, что потребовало использования функции Грина для уравнения движения в данном случае. Помимо этого, интересным представлялся случай рассеяния $2 \to n$ в древесном приближении, который был рассмотрен в работах [8, 9]. В этих работах было замечено, что при $n > 4$ все пороговые амплитуды обращаются в ноль. Тем не менее, явные вычисления ненулевых амплитуд с помощью формализма решений классических уравнений не были проведены. Таким образом, представляется необходимым проделать это вычисление.

Поскольку перечисленные результаты являются существенно пороговыми, то представляет интерес обобщить данную технику на случай за порогом, чтобы вычислять более интересные с физической точки зрения величины.

С другой стороны, можно рассмотреть не только скалярные поля, но и калибровочные. При этом, конечно же, задача отыскания амплитуд заметно усложнится. Тем не менее, разработав схему выхода за порог, вычисление амплитуд в калибровочных теориях с помощью формулы Лемана-Симанчика-Циммермана представляется возможным. Интерес же вызывает следующий факт: n-частичные амплитуды в неабелевых теориях с калибровочной группой $SU(N)$ для определенного набора спиральностей частиц находятся с помощью формулы Парка-Тейлора, причем данная формула очень просто выписывается в спинорно-спиральном формализме (spinor helicity formalism) (см. обзор [17]). Таким образом, формула Парка-Тейлора позволяет выписать амплитуду в калибровочной теории буквально в несколько строк. При этом, одними из ненулевых будут амплитуды, в которых два калибровочных бозона будут иметь одинаковый знак спиральности, а все остальные обратный. Этот факт и хотелось бы продемонстрировать с помощью формализма решений классических уравнений, а также, конечно, найти сами эти амплитуды.

В настоящей работе показывается связь между решениями классических уравнений движения и древесными амплитудами. Данная связь демонстрируется на известном примере рассеяния $1 \to n$ на пороге. Далее производится построение схемы выхода за порог с использованием решений классических уравнений для случая скалярной теории, и эта схема применяется для вычисления амплитуд $2 \to n$, когда начальные и конечные частицы находятся на массовой поверхности, а конечные частицы находятся на пороге. Также изучаются неабелевы теории с калибровочной группой $SU(N)$. Для них разрабатывается схема вычисления амплитуд с использованием решений классических уравнений. Эта схема применяется для нахождения 3-частичных и 4-частичных амплитуд.

2. Редукционная формула Лемана-Симанчика-Циммермана

Основным инструментом, который будет использован для связи амплитуд и решений уравнений движения, является редукционная формула Лемана-Симанчика-Циммермана. Общий схематичный вид этой формулы [10]:

$$A_{m\to n} = \langle p_1, ..., p_n| \, S \, |k_1, ..., k_m\rangle = \lim_{p_i^2 \to m^2} (-i) G_{m+n}(k_1, ..., k_m, p_1, ..., p_n) \times \\ \times \prod_{i=1}^{m+n} \frac{1}{(-i)G_2(p_i)} \times \prod_{j=1}^{m} v^-(k_j) \times \prod_{k=1}^{m} v^+(p_k), \tag{1}$$

где G_n – n-точечная функция Грина, а $v^\pm$ – решения свободных уравнений, связанные с поляризацией конечных и начальных частиц соответственно.

2.1. Скалярные теории

В третьей главе мы будем иметь дело со скалярными теориями, поэтому никакой поляризационной структуры в формуле (1) не присутствует.

$n + m$–точечная функция Грина в импульсном представлении определяется преобразованием Фурье функции Грина в координатном представлении:

$$G_{n+m}(k_1, ..k_m, p_1..., p_n) = \int d^4x_1...d^4x_{n+m} e^{-\sum\limits_{i=1}^{m} ik_ix_i} e^{\sum\limits_{j=1}^{n} ip_jx_j} \times \\ \times G_{n+m}(x_1, ..., x_{n+m}), \tag{2}$$

где подразумевается, что в импульсном представлении функции Грина содержится $(2\pi)^4\delta(\sum\limits_{i=1}^{m} k_i - \sum\limits_{j=1}^{n} p_j)$, отвечающая за закон сохранения 4-импульса.

Для нахождения функции Грина в координатном представлении перепишем ее с помощью вариационных производных по производящему функционалу:

$$-iG_{n+m}(x_1,...,x_{n+m}) = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_1)} \times ... \times \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_{n+m})} Z[j]\bigg|_{j=0}. \tag{3}$$

Явно выписывая определение производящего функционала $Z[j] = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{i(S+\int d^4x j(x)\phi(x))}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS}}$ и варьируя один раз по источнику, приходим к общей формуле для амплитуд подстановкой (2) и (3) в (1) для скалярной теории:

$$A_{m\to n} = \lim_{p^2_{i,j}\to m^2} \prod_{i=1}^{m}(k_i^2 - m^2)\prod_{j=1}^{n}(p_j^2 - m^2)\int d^4x_1...d^4x_{n+m} e^{-\sum\limits_{i=1}^{m} ik_i x_i} \times$$

$$e^{\sum\limits_{j=1}^{n} ip_j x_j} \times (-i)^{2(n+m)-1}\frac{\delta}{\delta j(x_1)} \times ... \times \frac{\delta}{\delta j(x_{n+m-1})} \langle\Omega|\, \phi(x_{n+m})\, |\Omega\rangle \bigg|_{j=0}. \tag{4}$$

Более подробно данное вычисление будет проделано в следующем разделе для случая $1 \to n$.

2.2. Калибровочные теории

Рассмотрим теперь теорию Янга-Миллса, лагранжиан которой имеет вид:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}\text{Tr } F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{5}$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}}[A_\mu, A_\nu]$ (подробно выбор нормировки описан в разделе 4.1.). При этом каждое поле A_μ раскладывается по генераторам калибровочной группы $SU(N)$ следующим образом:

$$A_\mu = A_\mu^a T^a, \qquad a = 1,...,N^2 - 1. \tag{6}$$

Таким образом, у поля A имеется не только индекс по группе Лоренца, а также и индекс по калибровочной группе, так называемый, цветовой индекс.

Попробуем переписать (1) в теории (5). Сразу отметим, что для простоты обозначений мы рассмотрим случай рассеяния $0 \to n$, или n-точечные амплитуды, где все частицы будем считать выходящими из диаграммы. Если потребуется вычислить процесс $k \to l$, где $k + l = n$, то p_i заменяется на $-p_i$ для начальных k частиц.

Для начала запишем выражение для n-точечной функции Грина G_n, которую для простоты будем обозначать G, в координатном представлении:

$$-iG^{\mu_1...\mu_n}_{a_1...a_n}(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^{a_1}_{\mu_1}(x_1)} \times ... \times \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^{a_n}_{\mu_n}(x_n)} Z[j]\bigg|_{j=0}. \tag{7}$$

При этом производящий функционал $Z[j]$ при наложении калибровки имеет вид:

$$Z[j] = \frac{1}{N}\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}\; exp\left(i\int d^4x\left(\mathcal{L} + j^a_\mu A^{\mu a}\right)\right), \tag{8}$$

где $N = \displaystyle\int \mathcal{D}A\;\mathcal{D}c\;\mathcal{D}\bar{c}\; exp\left(i\int d^4x\mathcal{L}\right)$ – нормировка. В этом выражении под $\mathcal{L}$ понимается полный лагранжиан после наложения калибровки $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{ghost}$, где $\mathcal{L}_{gf}$ – лагранжиан калибровочного поля, $\mathcal{L}_{ghost}$ – лагранжиан полей-духов Фаддеева-Попова $(c, \bar{c})$, которые непременно возникают в калибровочных теориях.

Проварьируем (8) по источнику $j^{a_n}_{\mu_n}$, тогда (7) примет вид:

$$-iG^{\mu_1...\mu_n}_{a_1...a_n}(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^{a_1}_{\mu_1}(x_1)} \times ... \times \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^{a_{n-1}}_{\mu_{n-1}}(x_{n-1})} \langle\Omega|\, A^{\mu_n a_n}(x_n)\,|\Omega\rangle\bigg|_{j=0}. \tag{9}$$

Переходя в импульсное представление с помощью (2) получим:

$$\begin{aligned}-iG^{\mu_1...\mu_n}_{a_1...a_n}(p_1, ..., p_n) = \int d^4x_1...d^4x_n e^{i\sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^{a_1}_{\mu_1}(x_1)} \times ...\times \\ \times\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^{a_{n-1}}_{\mu_{n-1}}(x_{n-1})} \langle\Omega|\, A^{\mu_n a_n}(x_n)\,|\Omega\rangle\bigg|_{j=0}.\end{aligned} \tag{10}$$

Пропагатор $G_{2\,\mu\nu}^{\;ab}(p)$, который в дальнейшем для простоты обозначим как $D^{ab}_{\mu\nu}(p)$, в калибровочной теории зависит от калибровки, поэтому явно мы сможем выписать его только после фиксации калибровки.

В итоге, собирая (10), пропагаторы и вектора поляризации в (1), получим:

$$A_n\left(p_1, \epsilon_1(p_1), ..., p_n, \epsilon_n(p_n)\right) = (i)^n \lim_{p_i^2 \to 0} \prod_{i=1}^{n} \left(D^{a_i b_i}_{\mu_i \nu_i}(p_i)\right)^{-1} \int d^4x_1 ... d^4x_n \times$$
$$\times e^{i \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j^{a_1}_{\mu_1}(x_1)} \times ... \times \times \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j^{a_{n-1}}_{\mu_{n-1}}(x_{n-1})} \left\langle \Omega \right| A^{\mu_n a_n}(x_n) \left| \Omega \right\rangle \Bigg|_{j=0} \prod_{i=1}^{n} \epsilon^{b_i}_{\nu_i}. \tag{11}$$

Здесь под пропагатором в степени -1 понимается оператор обратный к пропагатору, а вектора поляризации ϵ имеют помимо лоренцева индекса еще и цветовой.

Выражение (11) является окончательным ответом для формулы ЛСЦ в теории Янга-Миллса.

3. Амплитуды в скалярных теориях и редукционная формула

3.1. Амплитуды на пороге в теории ϕ^4

Рассмотрим для начала один из самых простых случаев расчета амплитуд: рождение из виртуальной частицы $1 \to n$ для теории ϕ^4. Данные вычисления практически полностью опираются на результаты, полученные в [2].

Итак, лагранжиан для данной теории:

$$\mathcal{L} = \frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} - \frac{m^2\phi^2}{2} - \frac{\lambda\phi^4}{4!}.$$

Мы изучаем древесные амплитуды на пороге, то есть Фейнмановские диаграммы нашего процесса не будут иметь петель, импульс конечных частиц $\vec{p_i} = 0$, а сами частицы будут лежать на массовой поверхности. Также заметим, что из $\mathbb{Z}_2$ симметрии лагранжинана следует, что ненулевые амплитуды будут, если $n + 1-$ чётно, поэтому число конечных частиц – нечётно.

В рассматриваемом случае скалярной теории никаких векторов поляризации в (1) нет, а в силу пороговой кинематики (1) сильно упрощается. Также мы не ампутируем у функции Грина линию, соответствующую начальной частице, поскольку в рассматриваемом случае она виртуальная. В итоге получаем:

$$A_{1\to n} = (-1)^n \lim_{p_i^2 \to m^2} i^{n-1} G_{n+1}(k_1, p_1, ..., p_n)(\omega^2 - m^2)^n, \tag{12}$$

где ω–энергия конечных частиц.

$n + 1$–точечную функцию Грина в импульсном представлении можно найти преобразованием Фурье функции Грина в координатном представлении :

$$G_{n+1}(k_1, ..., p_n) = \int d^4x_1 ... d^4x_{n+1} e^{-ik_1x_{n+1}} e^{ip_1x_1 + ... + p_nx_n} \times \\ \times G_{n+1}(x_1, ..., x_{n+1}), \tag{13}$$

Чтобы найти функцию Грина в координатном представлении запишем её определение через производящий функционал:

$$- iG_{n+1}(x_1, ..., x_{n+1}) = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_1)} \times ... \times \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_{n+1})} Z[j]\bigg|_{j=0}. \qquad (14)$$

Подставляя явное выражение для производящего функционала через континуальный интеграл $Z[j] = \dfrac{\int \mathcal{D}\phi e^{i(S+\int d^4x j(x)\phi(x))}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS}}$ и варьируя по $j(x_{n+1})$ получим:

$$-iG_{n+1}(x_1, ..., x_{n+1}) = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_1)} \times ... \times \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_n)} \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{i(S+\int d^4x j(x)\phi(x))}\phi(x_{n+1})}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS}}\bigg|_{j=0} =$$
$$= (-i)^n \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \times ... \times \frac{\delta}{\delta j(x_n)} \langle\Omega| \phi(x_{n+1}) |\Omega\rangle . \qquad (15)$$

Заметим, что в силу произвольности источника, мы можем положить удобным образом, а именно $j(x_i) = j_0 e^{ip_i x_i}$. Выбирая источник таким и подставляя (15) в (3), а также, заменяя вариационные производные на обычные с помощью выражения

$$\int d^4x_i e^{i\omega t_i} \frac{\delta}{\delta j(x_i)} = \frac{\partial}{\partial j_0}$$

получим окончательный вид (1):

$$A_{1\to n} = (-1)^n \lim_{p_i^2 \to m^2} (\omega^2 - m^2)^n \frac{\partial^n}{\partial j_0^n} \int d^4x e^{-imnt} \langle\Omega| \phi(x) |\Omega\rangle \bigg|_{j_0=0} \qquad (16)$$

Разберемся, какому уравнению удовлетворяет функция Грина $\langle\Omega| \phi(x) |\Omega\rangle$. Пользуясь определением функции Грина через континуальный интеграл получим выражение:

$$\langle\Omega| \phi(x) |\Omega\rangle = \frac{1}{i}\frac{\delta Z[j]}{\delta j(x)} = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x)} \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{i(S+\int d^4y j(y)\phi(y))}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS}} =$$
$$= \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{i(S+\int d^4y j(y)\phi(y))}\phi(x)}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS}}. \qquad (17)$$

Рассмотрим выражение вида $\frac{1}{Z[j]}\frac{1}{i}\frac{\delta Z[j]}{\delta j(x)}$. Ведем обозначение:

$$\frac{1}{Z[j]}\frac{1}{i}\frac{\delta Z[j]}{\delta j(x)} = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{i(S+\int d^4y j(y)\phi(y))}\phi(x)}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS+\int d^4y j(y)\phi(y))}} = \phi^j(x). \tag{18}$$

Используя обозначение (18) амплитуда в (16) перепишется как:

$$A_{1\to n} = (-1)^n \lim_{p_i^2\to m^2}(\omega^2 - m^2)^n \frac{\partial^n}{\partial j_0^n}\int d^4x e^{-imnt}\phi^j(x)Z[j]\bigg|_{j_0=0} \tag{19}$$

Далее вместо функции Грина $\langle\Omega|\,\phi(x)\,|\Omega\rangle = \phi^j(x)Z[j]$ будем писать просто $\phi^j(x)$. Так можно сделать потому, что слагаемые в (16), полученные варьированием производящего функционала в древесном приближении представляют собой несвязные куски функции Грина и не вносят вклад в амплитуду. Более подробно это рассуждение представлено в Приложении B. Обозначение $\phi^j(x)$ не случайно: таким образом, мы явно указываем, что поле $\phi(x)$ – это поле в присутствие внешнего произвольного источника.

Для общего случая скалярной теории известно уравнение, которому удовлетворяет производящий функционал (его вывод можно найти, например, в [11]):

$$(\partial^2 + m^2)\frac{1}{i}\frac{\delta Z[j]}{\delta j(x)} - \mathcal{L}_I'\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x)}\right]Z[j] = j(x)Z[j],$$

где $\mathcal{L}_I' = \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \phi}$, а $\mathcal{L}_I$ – лагранжиан взаимодействия теории.

Заметим, что это уравнение можно переписать в наших обозначениях для теории ϕ^4:

$$(\partial^2 + m^2)\phi^j(x) + \frac{\lambda}{3!Z[j]}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x)}\right]^3 Z[j] = j(x) \tag{20}$$

Явно проварьируем по j и восстановим $\hbar$ по размерности в (20). В итоге получим искомое уравнение на $\phi^j(x)$:

$$(\partial^2 + m^2)\phi^j(x) + \frac{\lambda}{6}(\phi^j(x)^3 - 3i\hbar\phi^j(x)\frac{\delta\phi^j(x)}{\delta j(x)} - \hbar^2\frac{\delta^2\phi^j(x)}{\delta j(x)^2}) = j(x). \tag{21}$$

Уравнение (21) является уравнением на матричный элемент в (16) в присутствие источника. Второе и третье слагаемое в скобке описывают квантовые поправки для $\phi^j(x)$.

Уравнение на матричный элемент в интересующем нас древесном приближении получается из (21) стремлением $\hbar$ к 0:

$$(\partial^2 + m^2)\phi^j(x) + \frac{\lambda}{6}\phi^j(x)^3 = j(x), \tag{22}$$

и совпадает с уравнением движения для поля ϕ с источником.

Пороговая кинематика подсказывает, что мы в праве рассматривать пространственно-однородные решения уравнения (22), поэтому оно сводится к неоднородному ОДУ. Подставляя явный вид источника, который мы зафиксировали ранее получим:

$$\ddot{\phi}^j(t) + m^2\phi^j(t) + \frac{\lambda}{6}\phi^j(t)^3 = j_0 e^{i\omega t}. \tag{23}$$

Такое уравнение можно, в принципе, решать по теории возмущений. Так, в нулевом приближении получим одно из частных решений:

$$\phi^j(t)^{(0)} = z(t) = \frac{j_0}{m^2 - \omega^2} e^{i\omega t}. \tag{24}$$

Но, можно заметить, что данное (но уже однородное) уравнение имеет первый интеграл, причем энергия системы, исходя из условия $\phi^j(t)|_{\lambda\to 0} = z(t)$ равна 0:

$$\frac{(\dot{\phi}^j(t))^2}{2} + \frac{m^2\phi^j(t)^2}{2} + \frac{\lambda}{4!}\phi^j(t)^4 = 0. \tag{25}$$

Интегрируя это уравнение, можно получить явное решение (в режиме $\omega \to m$, $j_0 \to 0$) (23):

$$\phi^j(t) = \frac{z(t)}{1 - \frac{\lambda}{48m^2} z^2(t)}. \tag{26}$$

Это же решение было получено в [2].

Для окончательного ответа для амплитуды остается заметить, что выражение перед матричным элементом в (16) является производной по $z(t)$, а именно:

$$(m^2 - \omega^2)e^{-i\omega t}\frac{\partial}{\partial j_0} = \frac{\partial}{\partial z(t)}.$$

И тогда получим финальный ответ для амплитуды:

$$A_{1\to n} = \frac{\partial^n}{\partial z(t)^n}\phi^j(x)\bigg|_{z=0} = n!\left(\frac{\lambda}{48m^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}(2\pi)^4\delta(k_1 - (p_1 + .. + p_n)). \quad (27)$$

Этот пороговый ответ совпадает с найденным в [2] и [6] с помощью диаграммной техники и рекуррентного уравнения для амплитуды.

Также стоит отметить, что явное применение правил Фейнмана для решения такой задачи является затруднительным. Тем не менее, для небольшого n вполне легко проделать соответствующее вычисление и убедиться, что (27) совпадает с ответом, полученным по правилам Фейнмана.

В итоге, мы видим, что связь между классическими решениями и амплитудами на пороге следующая: решение классического уравнения является производящей функцией для амплитуд.

3.2. Амплитуды за порогом в теории ϕ^4

Полученный в предыдущем разделе пороговый результат является менее полезным в физическом смысле, нежели случай выхода за порог. В самом деле, расчет амплитуд за порогом позволит нам узнать амплитуды, а далее, если потребуется, сечения и времена жизни для частиц с произвольными конечными импульсами.

Для расчета сразу же воспользуемся общей формулой (4), которая была получена в первой главе.

Итак, опять же рассмотрим задачу нахождения амплитуд рассеяния $1 \to n$, где начальная частица является виртуальной.

Редукционная формула (1) в данном случае принимает вид:

$$A_{1\to n} = \lim_{p_i^2 \to m^2} \prod_{i=1}^{n}(p_i^2 - m^2) \int d^4x_1 ... d^4x_{n+1} e^{-ik_1 x_{n+1}} e^{ip_1 x_1 + ... + p_n x_n} \times$$
$$\times \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \times ... \times \frac{\delta}{\delta j(x_n)} \langle\Omega| \phi(x_{n+1}) |\Omega\rangle \bigg|_{j=0}. \quad (28)$$

В древесном приближении, как было показано в разделе 2, матричный элемент удовлетворяет классическому уравнению движения

(22). Чтобы получить непосредственно амплитуду, нужно всего лишь решить уравнение движения. Решать это уравнение можно, например, по теории возмущений. Единственный неоднозначный момент заключается в том, какой источник подставить в уравнение движения. На самом деле, оказывается, что источник может иметь совершенно произвольный вид, и его выбор не принципиален и подбирается из соображений удобства при решении уравнения. Единственное условие, которое на него налагается – это зависимость от всех конечных импульсов, если все начальные частицы находились вне массовой поверхности. Это условие важно, поскольку мы хотим получить в окончательном ответе для амплитуд полюса вида $p_i^2 - m^2$, которые сократили бы такие же слагаемые, возникающие из пропагатора.

Продемонстрируем пример вычисления амплитуд $0 \to 4$ в рассматриваемой нами теории с помощью решения уравнения движения. Как известно, в теории ϕ^4 вклад в амплитуду с $n+1$ ногой в древесном приближении дает $k = \dfrac{n-1}{2}$ порядок теории возмущений. Тогда для рассматриваемого случая нас интересует первый порядок по теории возмущений. Нулевой порядок теории возмущений дает общее решение, удовлетворяющее фейнмановским граничным условиям:

$$\phi^j(x)^{(0)} = \int d^4y G(x-y) j(y). \tag{29}$$

Тогда уравнение в первом порядке теории возмущения имеет вид:

$$(\partial^2 + m^2)\phi^j(x)^{(1)} = -\frac{[\phi^j(x)^{(0)}]^3}{6}, \tag{30}$$

а его решение:

$$\begin{aligned} \phi^j(x)^{(1)} = -\frac{1}{6}\int d^4y G(x-y)\int d^4u_1 G(u_1-y)j(u_1)\int d^4u_2 \times \\ \times G(u_2-y)j(u_2)\int d^4u_3 G(u_3-y)j(u_3). \end{aligned} \tag{31}$$

Тогда, подставляя это решение в (2.1) для данного случая, имеем:

$$A_{0\to 4} = i\lambda \lim_{p_i^2\to m^2} \prod_{i=1}^{4}(p_i^2 - m^2) \int d^4x_1 ... d^4x_4 e^{ip_1x_1+...+p_4x_4} \times$$
$$\times \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \frac{\delta}{\delta j(x_2)} \frac{\delta}{\delta j(x_3)} \phi^j(x_4)^{(1)} = -i\lambda\delta(p_1+p_2+p_3+p_4). \qquad (32)$$

Мы видим, что полученный ответ совпадает с известным, который можно получить с помощью правил Фейнмана.

Итак, общая техника нахождения амплитуд за порогом заключается в том, чтобы найти решение уравнения (22) по теории возмущений. Нужный порядок теории возмущений находится по числу конечных частиц: $k = \frac{n-1}{2}$. Наша текущая задача – найти выражение типа (27) в случае за порогом.

Вернемся к рассеянию $1 \to n$. Рассмотрим источник вида $j(x) = j_1 e^{ip_1x} + ... + j_n e^{ip_nx}$. Видно, что он зависит от всех конечных импульсов, а поэтому он пригоден для нашего вычисления. Первые 3 порядка теории возмущения для уравнения (22) с таким источником, которые вносят вклад в амплитуды $1 \to 3$, $1 \to 5$ и $1 \to 7$, имеют вид:

$$\phi^j(x)^{(0)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{j_k}{m^2 - p_k^2} e^{ip_kx} = \sum_{k=1}^{n} z_k e^{ip_kx}, \qquad (33)$$

$$\phi^j(x)^{(1)} = \frac{\lambda}{3!} \sum_{1\le k_1\le k_2\le k_3}^{n} M_{k_1k_2k_3} \frac{z_{k_1}z_{k_2}z_{k_3}}{\Delta^2_{k_1k_2k_3} - m^2} e^{ix\Delta_{k_1k_2k_3}}, \qquad (34)$$

$$\phi^j(x)^{(2)} = \frac{\lambda^2}{3!2!} \sum_{1\le k_1\le ...\le k_5}^{n} M_{k_1...k_5} \frac{z_{k_1}...z_{k_5}}{(\Delta^2_{k_1...k_5} - m^2)(\Delta^2_{k_3k_4k_5} - m^2)} e^{ix\Delta_{k_1...k_5}}, \qquad (35)$$

$$\phi^j(x)^{(3)} = \sum_{1\le k_1\le ...\le k_7}^{n} M_{k_1...k_7} \frac{z_{k_1}...z_{k_7}}{(\Delta^2_{k_1...k_7} - m^2)} \left(\frac{1}{3!2!(\Delta^2_{k_2k_3k_4} - m^2)(\Delta^2_{k_5k_6k_7} - m^2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2!2!(\Delta^2_{k_3...k_7} - m^2)(\Delta^2_{k_5k_6k_7} - m^2)} \right) e^{ix\Delta_{k_1...k_7}} \frac{\lambda^3}{3!}, \qquad (36)$$

где использованы следующие обозначения: $\Delta_{k_1...k_f} = p_1 + ... + p_f$ и $M_{k_1...k_f} = \dfrac{f!}{\prod\limits_{i=1}^{f}(\text{duplicate indexes})!}$. Поскольку нас интересует ситуация всех различных конечных импульсов, то соответствующие вклады (34)-(36) перепишутся в виде:

$$\phi^j(x)^{(1)} = \lambda \frac{z_1 z_2 z_3}{\Delta_{123}^2 - m^2} e^{ix\Delta_{123}}, \tag{37}$$

$$\phi^j(x)^{(2)} = \lambda^2 \frac{5!}{3!2!} \frac{z_1...z_5}{(\Delta_{1...5}^2 - m^2)(\Delta_{345}^2 - m^2)} e^{ix\Delta_{1...5}} \tag{38}$$

$$\phi^j(x)^{(3)} = \lambda^3 \frac{7!}{3!} \frac{z_1...z_7}{(\Delta_{1...7}^2 - m^2)} \left(\frac{1}{3!2!(\Delta_{234}^2 - m^2)(\Delta_{567}^2 - m^2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2!2!(\Delta_{3...7}^2 - m^2)(\Delta_{567}^2 - m^2)} \right) e^{ix\Delta_{1...7}}. \tag{39}$$

Получив несколько низших порядков решения по теории возмущений, можно выписывать более высокие порядки теории возмущений с помощью рекуррентного соотношения:

$$\phi^j(x)^{(k)} = \frac{\lambda}{3!} \sum_{n_1,n_2,n_3=0}^{k-1} M_{n_1 n_2 n_3} \phi^j(x)^{(n_1)} \phi^j(x)^{(n_2)} \phi^j(x)^{(n_3)}, \tag{40}$$

с дополнительным условием $n_1 + n_2 + n_3 = k - 1$.

Таким образом, мы формально нашли решение в произвольном порядке теории возмущений. Перепишем формулу (28), подставив в нее формальное решение (40):

$$A_{1\to n} = \lim_{p_i^2 \to m^2} \prod_{i=1}^{n} (p_i^2 - m^2) \int d^4x_1 ... d^4x_{n+1} e^{-ik_1 x_{n+1}} e^{ip_1 x_1 + ... + p_n x_n} \times$$
$$\times \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \times ... \times \frac{\delta}{\delta j(x_n)} \phi^j(x_{n+1})^{(k)} \Big|_{j=0}. \tag{41}$$

Мы хотим свести (41) к виду (27). Каким образом это сделать, подсказывает вид решений (33)-(36), а именно нам необходимо продифференцировать каждое получившееся решение по z_k. Таким образом, делая замену в (41):

$$\int d^4x_i(p_i^2 - m^2)e^{ip_ix_i}\frac{\delta}{\delta j(x_i)} = \frac{\partial}{\partial z_i}. \tag{42}$$

Тогда окончательный ответ для амплитуды записывается в следующем виде:

$$A_{1\to n} = \frac{\partial}{\partial z_1} \times ... \times \frac{\partial}{\partial z_n}\phi^j(x_{n+1})^{(k)}\bigg|_{z=0}(2\pi)^4\delta(k_1 - (p_1 + ... + p_n)). \tag{43}$$

Подведем итог: в данном разделе на теории ϕ^4 мы продемонстрировали схему вычисления амплитуды за порогом в древесном приближении. Данная схема подходит для вычисления в любой теории, включая калибровочные, с той лишь разницей, что окончательный результат необходимо помножить на поляризации начальных и конечных частиц, и уравнения движения будут принимать более сложный вид. Единственная техническая трудность заключается в том, чтобы найти решение в необходимом порядке теории возмущений.

Сделаем несколько важных замечаний. Во-первых, покажем, что при $p_1 = p_2 = ... = p_n = (\omega, \vec{0})$ ответ, найденный по схеме (43), совпадает с ответом, полученным в предыдущем разделе.

Для этого рассмотрим источник вида $j(x) = j_1e^{i\omega x} + ... + j_ne^{i\omega x}$. В таком случае решения (37)-(39) переписываются в виде:

$$\phi^j(x)^{(1)} = \lambda\frac{z_1z_2z_3}{8m^2}e^{i\omega x}, \qquad z_k = \frac{j_k}{m^2 - \omega^2}, \tag{44}$$

$$\phi^j(x)^{(2)} = \lambda^2\frac{5!}{3!2!}\frac{z_1...z_5}{(24m^2)(8m^2)}e^{5i\omega x} = \frac{\lambda^2}{m^4}\frac{5}{96}e^{5i\omega x}, \tag{45}$$

$$\begin{aligned}\phi^j(x)^{(3)} = \lambda^3\frac{7!}{3!}\frac{z_1...z_7}{48m^2}\left(\frac{1}{3!2!(8m^2)(8m^2)} + \frac{1}{2!2!24m^28m^2}\right)e^{7i\omega x} = \\ = \frac{\lambda^3}{m^6}\frac{7!}{48^3}e^{7i\omega x},\end{aligned} \tag{46}$$

где считается, что все частицы находятся на массовой поверхности, то есть $\omega \to m$, а $j_k \to 0$. Таким образом z_k остаются конечными. Подставляя

(44)-(46) в (43) получим ответы для амплитуд $1 \to 3$, $1 \to 5$ и $1 \to 7$:

$$A_{1\to 3} = \frac{\lambda}{8m^2}, \tag{47}$$

$$A_{1\to 5} = \frac{\lambda^2}{m^4}\frac{5}{96}, \tag{48}$$

$$A_{1\to 7} = \frac{\lambda^3}{m^6}\frac{7!}{48^3}. \tag{49}$$

Как видно, эти ответы совпадают с полученными в (27) (здесь мы опустили множители, соответствующие закону сохранения 4-импульса, которые получаются интегрированием экспоненциального множителя в (44)-(46)), поэтому данная схема для порогового случая действительно переходит в рассмотренную в предыдущем разделе.

Во-вторых, заметим, что в наше определение для z_k не входит множитель $e^{ip_k x}$, то для начальных и конечных частиц они просто будут совпадать по виду. Поэтому данная схема подходит и для рассеяния $m \to n$, а именно:

$$A_{m\to n} = \prod_{i=1}^{m+n-1} \frac{\partial}{\partial z_i}\phi^j(x_{n+m})^{(k)}\Big|_{z=0}(2\pi)^4\delta(\sum_{j=1}^{m} k_j - \sum_{k=m+1}^{m+n} p_k). \tag{50}$$

3.3. Примеры вычисления амплитуд

В качестве примера сформулированной выше схемы вычисления амплитуд рассмотрим рассеяние $2 \to n$, когда все частицы находятся на массовой поверхности, а конечные частицы находятся на пороге. В данном случае пороговая кинематика поможет нам получить точный ответ для амплитуды, в то время как для случая произвольных конечных импульсов мы столкнулись бы с техническими трудностями, которые обсуждались в предыдущем разделе. Итак, выберем лагранжиан теории в виде:

$$\mathcal{L} = \frac{(\partial_\mu\phi)^2}{2} - \frac{m^2\phi^2}{2} - \frac{\lambda\phi^4}{4}. \tag{51}$$

Редукционная формула (4) в данном случае принимает вид:

$$A_{2\to n} = (i) \lim_{p_i^2\to m^2} \prod_{i=1}^{2} (k_i^2 - m^2) \times (\omega^2 - m^2)^n \int d^4x_1 ... d^4x_{n+2} e^{-ik_1x_{n+1} - ik_2x_{n+2}} \times$$
$$\times e^{i\omega(t_1+...+t_n)} \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \times ... \times \frac{\delta}{\delta j(x_n)} \times \frac{\delta}{\delta j(x_{n+1})} \phi^j(x_{n+2}) \Big|_{j=0}. \tag{52}$$

Где источники в силу выбранной кинематики принимают вид: $j(t) = j_0 e^{i\omega t}$ для конечных частиц и $j(x) = j_1 e^{-ik_1x}$ для начальных. Заметим, что явно второй источник j_2 для второй начальной частицы добавлять не нужно, поскольку, фактически, по нему мы уже проварьировали производящий функционал. Переписывая в (52) в терминах сформулированной схемы:

$$A_{2\to n} = (i) \left(\frac{\partial}{\partial z_0} \right)^n \frac{\partial}{\partial z_1} \phi^j(z_0(t), z_1(x)) (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 - n(m, \vec{0})). \tag{53}$$

Уравнение, которому удовлетворяет поле в древесном приближении:

$$(\partial^2 + m^2)\phi^j(x) + \lambda \phi^j(x)^3 = j_0 e^{i\omega t} + j_1 e^{-ik_1x}. \tag{54}$$

Будем искать решение в виде: $\phi^j(x) = \phi_0(t) + \phi_1(x)$, где $\phi_0(t)$ есть решение (26), а $\phi_1(x)$ имеет первый порядок по источнику j_1. Этого условия на решение $\phi_1(x)$ достаточно для вычисления амплитуды, поскольку, как мы могли видеть в (53), полученное решение необходимо дифференцировать по z_1 только 1 раз.

Тогда уравнение на $\phi_1(x)$ имеет вид:

$$(\partial^2 + m^2 + 3\lambda \phi_0(t)^2)\phi_1(x) = j_1 e^{-ik_1x}. \tag{55}$$

Чтобы найти неизвестную функцию $\phi_1(x)$ необходимо получить функцию Грина дифференциального оператора в (55). Данное вычисление было сделано в [9] в контексте нахождения однопетлевых поправок для рассеяния $1 \to n$ в теории ϕ^4. Кратко приведем схему нахождения функции Грина:

1)Поскольку оператор $\phi_0(t)$, вообще говоря, является комплекснозначным, но не эрмитовым, то сделаем переход к евклидовому времени:

$$\tau = it + \frac{1}{m}\log(z_0) + \frac{1}{2m}\log\left(\frac{\lambda}{8m^2}\right) - \frac{i\pi}{2}.$$

Тем самым мы снимаем вопрос об эрмитовости оператора ϕ_0^2, поскольку теперь $\frac{\lambda}{8m^2}^{\frac{1}{2}} z(t) = ie^{m\tau}$.

2) Разложим функцию Грина $D(x-y)$, которая удовлетворяет уравнению $(\partial^2 + m^2 + 3\lambda\phi_0(t)^2)D(x-y) = \delta^4(x-y)$ в интеграл Фурье по пространственным компонентам:

$$D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} D(\tau_1, \tau_2, \vec{p}).$$

В таком случае искомая функция Грина $D(\tau_1, \tau_2, \vec{p})$ является функцией Грина для ОДУ (массу положим равной 1, а потом восстановим по размерности):

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + (\vec{p})^2 + 1 - \frac{6}{ch^2(\tau)}\right)u(\tau) = 0. \tag{56}$$

Введем обозначение $\omega^2 = (\vec{p})^2 + 1$. Тогда (56) является хорошо известным уравнением Шредингера для модифицированного потенциала Пешля-Теллера, рассмотренным в [14]. Заменой $th(\tau) = x$ (56) сводится к уравнению на присоединенные функции Лежандра:

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d}{dx}u\right) + \left(6 - \frac{\omega^2}{1-x^2}\right)u = 0. \tag{57}$$

Данное уравнение имеет пару линейно-независимых решений: $P_2^{(\omega)}(th(\tau))$ и $P_2^{(-\omega)}(th(\tau))$, причем, как известно $\omega = -2, ..., 2$. Но это только квадратично-интегрируемая часть решений (4.7). Если мы рассматриваем ограниченную при $\tau \to \pm\infty$ ветвь решений, то получим более общий класс решений (в который, конечно же, включены $P_2^{(\omega)}\left(th(\tau)\right)$ и $P_2^{(-\omega)}\left(th(\tau)\right)$):

$$f^+(\tau) = e^{\omega\tau}\left(\omega^2 - 3\omega th(\tau) + 2 - \frac{3}{ch^2(\tau)}\right), \tag{58}$$

$$f^-(\tau) = e^{-\omega\tau}\left(\omega^2 + 3\omega th(\tau) + 2 - \frac{3}{ch^2(\tau)}\right), \tag{59}$$

Тогда искомая функция Грина составляется из данной пары линейно-независимых решений:

$$D(\tau_1, \tau_2, \vec{p}) = \frac{1}{W_\omega}\left(f^+(\tau_1)f^-(\tau_2)\theta(\tau_2 - \tau_1) + f^+(\tau_2)f^-(\tau_2)\theta(\tau_1 - \tau_2)\right). \tag{60}$$

Здесь $W_\omega = 2\omega(\omega^2 - 1)(\omega^2 - 4)$–вронскиан двух ЛНЗ решений. Сразу же можно заметить, что, поскольку число нулей W_ω ограничено, что искомая функция Грина, а значит и решение, будет иметь конечное число полюсов, которые требуются нам в ЛСЦ. Поэтому ненулевыми амплитудами для рассеяния $2 \to n$, будут только амплитуды $2 \to 2$ и $2 \to 4$.

В итоге, делая обратное Фурье-преобразование находим $D(x - y)$, а затем и искомое решение $\phi_1(x)$:

$$\phi_1(\vec{x}, \tau) = j_1 \int d^4y e^{-ik_1 y} D(x, y) = j_1 e^{-ik_1\vec{x}}(-i)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\tau' \frac{e^{k_1^0(\tau-\tau')}}{2\omega(\omega^2-1)(\omega^2-4)}$$
$$\Bigg(e^{\omega(\tau-\tau')}\left[\frac{\omega^2-4}{4} + 3(th(\tau) - \frac{\omega}{2})^2\right]\left[\frac{\omega^2-4}{4} + 3(th(\tau') + \frac{\omega}{2})^2\right]\theta(\tau' - \tau) +$$
$$\Bigg(e^{\omega(\tau'-\tau)}\left[\frac{\omega^2-4}{4} + 3(th(\tau') - \frac{\omega}{2})^2\right]\left[\frac{\omega^2-4}{4} + 3(th(\tau) + \frac{\omega}{2})^2\right]\theta(\tau - \tau')\Bigg) \tag{61}$$

Это общий ответ для решения $\phi_1(x)$. На самом деле, самый важный ответ состоит в том, что амплитуды при $n > 4$ равны нулю, поскольку его сложно получить для произвольного n с помощью правил Фейнмана. Амплитуды же $2 \to 2$ и $2 \to 4$ легко получаются применением правил Фейнмана. Тем не менее, приведем вывод амплитуды $2 \to 4$.

В таком случае формула (61) имеет вид:

$$\phi_1(\vec{x}, \tau) = (-i\lambda) j_1 \frac{9e^{-ik_1\vec{x}}}{2W_2}\phi_0^2(\tau)\Bigg(\int\limits_{\tau}^{+\infty} d\tau' e^{k_1^0(\tau-\tau')} e^{-\omega\tau'}(th(\tau') + \frac{\omega}{2})^2 +$$
$$\int\limits_{-\infty}^{\tau} d\tau' e^{-k_1^0(\tau-\tau')} e^{\omega\tau'}(th(\tau') - \frac{\omega}{2})^2\Bigg)\Bigg|_{\omega\to 2}. \tag{62}$$

Поскольку от интегралов в (62) нам необходима совершенно конкретная полюсная часть для ЛСЦ, то полностью получать ответ для них не нужно. Нам требуется выделить в этих интегралах только требуемую полюсную часть. Сделать это можно, например, разложив подынтегральное выражение с гиперболическим тангенсом в ряд по экспонентам: $th(x) = (1 - e^{-2x})(1 - e^{-2x} + ...)$.

Таким образом, нужная нам часть (62) принимает вид:

$$\phi_1(\vec{x}, \tau) = (-i\lambda) j_1 \lim_{\omega \to 2m} \frac{9e^{-ik_1\vec{x} + k_1^0\tau}}{2W_\omega} \phi_0^2(\tau) \frac{8\omega}{(k_1^0)^2 - \omega^2} + \\ + \text{регулярная часть, при } k_1 \to 0. \quad (63)$$

Это окончательный ответ для решения ϕ_1 для рассеяния $2 \to 4$.

Возвращаясь к Минковскому времени для ЛСЦ и используя выведенную схему (43), получаем ответ для амплитуды :

$$A_{2\to 4} = (i) \left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^4 \frac{\partial}{\partial z_1} (6\lambda\phi_0^2 z_1)\Big|_{z_0=0} (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 - 4(m, \vec{0})) = \\ = i\frac{\lambda^2}{8m^2} 48 \times 6 \times (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 - 4(m, \vec{0})) = \\ = i4! \frac{\lambda^2}{8m^2} \times 12 \times (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 - 4(m, \vec{0})). \quad (64)$$

Такой же ответ можно получить, используя правила Фейнмана для процесса $2 \to 4$ в теории ϕ^4, соответственно, полученный результат является верным.

4. Амплитуды в калибровочных теориях и редукционная формула

4.1. Калибровка и уравнение движения

Как и во второй главе мы рассматриваем теорию Янга-Миллса с лагранжианом:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{65}$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}}[A_\mu, A_\nu]$. При этом каждое поле A_μ раскладывается по генераторам калибровочной группы $SU(N)$:

$$A_\mu = A_\mu^a T^a, \qquad a = 1, ..., N^2 - 1. \tag{66}$$

Цветовой индекс пробегает такие значения, поскольку калибровочное поле принадлежит присоединенному представлению группы $SU(N)$. Генераторы калибровочной группы нормированы следующим образом:

$$\mathrm{Tr}\, T^a T^b = \delta^{ab},$$

а их коммутатор раскладывается по базису в алгебре с помощью структурных констант:

$$[T^a, T^b] = i\bar{f}^{abc}T^c.$$

Такая нормировка и структурное соотношение отличаются от привычных: $\mathrm{Tr}\, T^a T^b = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ и $[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$. В таких обозначениях $\bar{f} = \sqrt{2}f$. Эти переобозначения делаются для удобства дальнейших вычислений.

Как уже отмечалось во второй главе, полный лагранжинан представляется в виде:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{ghost}.$$

Причем лагранжиан духов Фаддева-Попова полностью определяется калибровкой.

Зафиксируем калибровку в следующем виде (Gervais-Neveu gauge):

$$G(A) = \partial_\mu A^\mu(x) - \frac{ig}{\sqrt{2}} (A^\mu)^2 - \omega(x). \tag{67}$$

Здесь считается, что $A^\mu(x)$ – матрица из алгербы Ли, а $\omega(x)$ произвольная матрица, которая, вообще говоря, не лежит в алгебре.

Калибровка (67) приводит к слагаемому, фиксирующему калибровку в лагранжиане [15]:

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(H^\mu_\mu\right)^2, \qquad H_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \frac{ig}{\sqrt{2}} A_\mu A_\nu. \tag{68}$$

Использование калибровки (67) и применение процедуры Фаддеева-Попова приводит к нетривиальным взаимодействиям духов. Но, поскольку на данном этапе мы собираемся рассматривать только древесные амплитуды, а диаграммы с духами всегда имеют петли, то для наших вычислений мы пренебрежем лагранжианом духов.

Тогда полный лагранжиан принимает следующий вид:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(H_{\mu\nu}H^{\mu\nu} - H_{\mu\nu}H^{\nu\mu} - H^\mu_\mu H^\nu_\nu\right). \tag{69}$$

После интегрирования по частям приходим к окончательному выражению:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A^a_\nu \partial^\mu A^{\nu a} - i\sqrt{2}\partial^\mu A^{\nu a} A^b_\nu A^c_\mu B_{abc} + \frac{g^2}{4}\left(A^{\mu a} A^{\nu b} A^c_\nu A^d_\mu\right) C_{abcd}, \tag{70}$$

где

$$B_{abc} = \mathrm{Tr}\left(T_a T_b T_c\right), \qquad C_{abcd} = \mathrm{Tr}\left(T_a T_b T_c T_d\right).$$

Лагранжиан (70) приводит к следующему уравнению движения

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu A^{\nu a} + i\sqrt{2}g\left(\partial^\mu\left(A^{\nu b} A^c_\mu\right) - A^b_\mu \partial^\mu A^{\nu c} - \partial^\nu A^{\mu b} A^c_\mu\right) B^a_{bc} + \\ + \frac{g^2}{2}\left(A^b_\mu A^{\mu c} A^{\nu d} + A^{\nu b} A^{\mu c} A^d_\mu\right) C^a_{bcd} = 0 \end{aligned} \tag{71}$$

4.2. Схема вычисления амплитуд

Во второй главе мы получили общий вид формулы ЛСЦ (11). Попробуем построить схему вычисления амплитуд, аналогичную (43).

Прежде всего разберемся с пропагатором: в такой калибровке он принимает вид:

$$D^{ab}_{\mu\nu}(p) = \frac{g_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}\delta^{ab}, \tag{72}$$

где $g_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$.

Подставляя (72) в (11), сворачивая вектора поляризации с метрикой и символом Кронекера, получим:

$$A_n\left(p_1, \epsilon_1(p_1), ..., p_n, \epsilon_n(p_n)\right) = (i) \lim_{p_i^2 \to 0} \prod_{i=1}^{n} p_i^2 \epsilon^{\mu_i a_i} \int d^4x_1 ... d^4x_n \times$$

$$\times e^{i\sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j} \frac{\delta}{\delta j^{a_1}_{\mu_1}(x_1)} \times ... \times \times \frac{\delta}{\delta j^{a_{n-1}}_{\mu_{n-1}}(x_{n-1})} \left\langle \Omega \right| A^{\mu_n a_n}(x_n) \left| \Omega \right\rangle \Bigg|_{j=0}. \tag{73}$$

Как было показано ранее, в скалярных теориях матричные элементы, стоящие по интегралом в формуле ЛСЦ в древесном приближении удовлетворяют классическим уравнениям движения. В калибровочных теориях ситуация совершенно аналогична. Поэтому матричный элемент $\left\langle \Omega \right| A^{\mu a}(x) \left| \Omega \right\rangle$, под которым для простоты обозначений далее будет пониматься само поле $A^{\mu a}(x)$, в древесном приближении удовлетворяет классическому уравнению (71) с источником. Источник, как и до этого, может быть выбран в совершенно произвольном виде, но обязательно должен содержать импульсы всех частиц. Мы выбираем источник вида:

$$J^{\nu a}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} j^{\nu a} e^{ip_i x}.$$

Заметим, что здесь яввно не выписан источник, соответствующий n -тому импульсу, но лишь по той причине, что мы уже проварьировали производящий функционал по n -тому источнику. Тогда уравнение (71) с источником выглядит следующим образом:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^{\nu a} + i\sqrt{2} g \left(\partial^\mu \left(A^{\nu b} A^c_\mu \right) - A^b_\mu \partial^\mu A^{\nu c} - \partial^\nu A^{\mu b} A^c_\mu \right) B^a_{bc} + \\ + \frac{g^2}{2} \left(A^b_\mu A^{\mu c} A^{\nu d} + A^{\nu b} A^{\mu c} A^d_\mu \right) C^a_{bcd} = \sum_{i=1}^{n-1} j^{\nu a} e^{i p_i x}. \qquad (74)$$

Найдем решение (74) в нулевом порядке теории возмущений:

$$A^{\nu a} = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{j^{\nu a}}{p_i^2} e^{i p_i x} = - \sum_{i=1}^{n-1} z_i^{\nu a} e^{i p_i x}. \qquad (75)$$

Здесь введено обозначение $z_i^{\nu a} = \dfrac{j^{\nu a}}{p_i^2}$. Тогда, заметим, что, используя данное обзначение, можно выразить вариационные производные по источникам в (73) через обыкновенные производные по z, также как это было сделано в (42):

$$\int d^4 x_k e^{i p_k x_k} p_k^2 \frac{\delta}{\delta j^{a_k}_{\mu_k}(x_k)} = \frac{\partial}{\partial z^{a_k}_{k \mu_k}}. \qquad (76)$$

Используем (76), чтобы окончательно переписать (73):

$$A_n \left(p_1, \epsilon_1, ..., p_n, \epsilon_n \right) = (i) \lim_{p_n^2 \to 0} p_n^2 \prod_{i=1}^{n} \epsilon^{a_i}_{\mu_i} \frac{\partial}{\partial z^{a_1}_{1 \mu_1}} \times ... \times \frac{\partial}{\partial z^{a_{n-1}}_{n-1 \mu_{n-1}}} A^{\mu_n a_n}(x_n) \bigg|_{z=0}. \qquad (77)$$

Опять же отметим, что здесь под $A^{\mu_n a_n}(x_n)$ понимается матричный элемент $\langle \Omega | A^{\mu_n a_n}(x_n) | \Omega \rangle$, то есть решение уравнения (74) в древесном приближении.

По итогу, схема для вычисления n-точечных древесных амплитуд в калибровочных теориях выглядит следующим образом: во-первых, необходимо найти решение (74) в $n-2$ порядке теории возмущений. Во-вторых, найденное решение нужно подставить в (77) и получить ответ.

Отметим, что на данный момент не представляется возможным решить уравнение (74) никаким способом, кроме как с помощью теории возмущений. Поэтому на данном этапе аналитически можно посчитать только 3-х и 4-х точечные амплитуды с помощью схемы (77) и сравнить свои ответы с известными, чем мы и займемся далее.

4.3. 3-Частичные амплитуды в теории Янга-Миллса

Для начала вычислим трехточечные амплитуды в теории Янга-Миллса. Согласно схеме (77) нам нужно найти решение в первом порядке теории возмущений. Данное решение имеет следующий вид:

$$A^{\nu a}_{(1)}(x) = -\sqrt{2}\sum_{i,j=1}^{2}\left(z_i^{\nu b} z_{j\,\mu}^{\,c}\Delta_{ij}^{\mu} - z_{i\,\mu}^{\,b} p_j^{\mu} z_j^{\nu c} - z_i^{\mu b} p_i^{\nu} z_{j\,\mu}^{\,c}\right)\frac{e^{i\Delta_{ij}x}}{\Delta_{ij}^2} B^a_{bc}. \tag{78}$$

Поскольку в нашем случае $n = 3$, то пользуясь законом сохранения импульса получим, что

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji} = \Delta_{12} = -p_3,$$

и Δ_{ij}^2 в (78) сокращает p_3^2 в (77).

Подстановка (78) в схему дает:

$$A_3 = ig\sqrt{2}\Big(\big((\epsilon^a\epsilon^{a_1})(\epsilon^{a_2}p_3) + (\epsilon^{a_2}\epsilon^a)(\epsilon^{a_1}p_2) + (\epsilon^{a_1}\epsilon^{a_2})(\epsilon^a p_1)\big)B_{aa_1a_2} +$$
$$+\big((\epsilon^{a_2}\epsilon^a)(\epsilon^{a_1}p_3) + (\epsilon^a\epsilon^{a_1})(\epsilon^{a_2}p_1) + (\epsilon^{a_1}\epsilon^{a_2})(\epsilon^a p_2)\big)B_{aa_2a_1}\Big). \tag{79}$$

Поскольку в вершину взаимодействия входят глюоны с тремя различными цветами, то a, a_1, a_2 можно упорядочить, тогда (80) переписывается в следующем виде:

$$A_3 = ig\sqrt{2}\Big(\big((\epsilon^1\epsilon^2)(\epsilon^3p_1) + (\epsilon^2\epsilon^3)(\epsilon^1p_2) + (\epsilon^3\epsilon^1)(\epsilon^2p_3)\big)B_{123} +$$
$$+\big((\epsilon^3\epsilon^1)(\epsilon^2p_1) + (\epsilon^1\epsilon^2)(\epsilon^3p_2) + (\epsilon^2\epsilon^3)(\epsilon^1p_3)\big)B_{132}\Big). \tag{80}$$

Ответ (80) совпадает с известным для трехточечной амплитуды в древесном приближении [17], с точностью до незначительного множителя $-i$, который иногда опускают.

Рассмотрим слагаемое при B_{123}. Ясно, что полная амплитуда получается из него суммированием со слагаемым с переставленными индексами 2 и 3. Тогда можно фиксировать поляризации для внешних частиц. Подставляя выражение для сверток векторов поляризации в, так называемом, спирально-спинорном формализме [17], (Приложение C) получим:

$$A_3[1^-,2^-,3^+] = ig\frac{\langle 12\rangle^3}{\langle 23\rangle\langle 31\rangle}B_{123}, \tag{81}$$

$$A_3[1^+,2^+,3^-] = ig\frac{[12]^3}{[23][31]}B_{123}. \tag{82}$$

Полная же амплитуда получится, если учесть вторую скобку в (80), то есть повторить проделанное вычисление, заменив индекс 3 на 2 и наоборот.

4.4. 4-Частичные амплитуды в теории Янга-Миллса

Найдем решение (74) во втором порядке теории возмущений:

$$A^{\nu a}_{(2)} = 2\sum_{i,j,k}\left[\left(z_i^{\nu b}\Pi^{de}_{\mu jk}\Delta^{\mu}_{ijk} - z^b_{i\mu}\Pi^{\nu de}_{jk}\Delta^{\mu}_{jk} - z_i^{\mu b}\Pi^{de}_{\mu jk}p_i^{\nu}\right)\frac{B_{cde}}{\Delta^2_{jk}}+\right.$$
$$\left.+\left(\Pi^{\nu de}_{ij}z^c_{\mu k}\Delta^{\mu}_{ijk} - \Pi^{de}_{\mu ij}z_k^{\nu c}p_k^{\mu} - \Pi^{\mu de}_{ij}z^c_{\mu k}\Delta^{\nu}_{ij}\right)\frac{B_{bde}}{\Delta^2_{ij}}\right]\frac{e^{i\Delta_{ijk}x}}{\Delta^2_{ijk}}B^a_{bc}-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\left(z^b_{\mu i}z_j^{\mu c}z_k^{\nu d} + z_i^{\nu b}z_j^{\mu c}z^d_{\mu k}\right)\frac{e^{i\Delta_{ijk}x}}{\Delta^2_{ijk}}C^a_{bcd}. \tag{83}$$

Здесь введено обозначение:

$$\Pi^{\nu bc}_{ij} = z_i^{\nu b}z^{\ c}_{j\mu}\Delta^{\mu}_{ij} - z^{\ b}_{i\mu}p_j^{\mu}z_j^{\nu c} - z_i^{\mu b}p_i^{\nu}z^{\ c}_{j\mu}. \tag{84}$$

Подстановка решения (83) в схему (77) дает:

$$A_4 = ig^2\Bigg[2\Bigg[B^a_{a_1c}B_{ca_2a_3}\big((\epsilon^a\epsilon^{a_1})(\epsilon^{a_2}\Delta_{13})(\epsilon^{a_3}p_2) - (\epsilon^a\epsilon^{a_1})(\epsilon^{a_3}\Delta_{12})(\epsilon^{a_2}p_3)-$$
$$-(\epsilon^a\epsilon^{a_1})(\epsilon^{a_2}\epsilon^{a_3})(p_2\Delta_{13}) + (\epsilon^a\epsilon^{a_2})(\epsilon^{a_3}p_2)(\epsilon^{a_1}\Delta_{23}) - (\epsilon^a\epsilon^{a_3})(\epsilon^{a_2}p_3)(\epsilon^{a_1}\Delta_{23})-$$
$$-(\epsilon^a p_2)(\epsilon^{a_2}\epsilon^{a_3})(\epsilon^{a_1}\Delta_{23}) + (\epsilon^a p_1)(\epsilon^{a_1}\epsilon^{a_2})(\epsilon^{a_3}p_2) - (\epsilon^a p_1)(\epsilon^{a_1}\epsilon^{a_3})(\epsilon^{a_2}p_3)-$$
$$-(\epsilon^a p_1)(\epsilon^{a_1}p_2)(\epsilon^{a_2}\epsilon^{a_3})\big)\frac{1}{\Delta^2_{23}} + B^a_{ba_3}B_{ba_1a_2}\big((\epsilon^a\epsilon^{a_1})(\epsilon^{a_3}\Delta_{12})(\epsilon^{a_2}p_1)-$$

$$- (\epsilon^a\epsilon^{a_2})(\epsilon^{a_3}\Delta_{12})(\epsilon^{a_1}p_2) - (\epsilon^a p_1)(\epsilon^{a_1}\epsilon^{a_2})(\epsilon^{a_3}\Delta_{12}) + (\epsilon^{a_1}p_3)(\epsilon^a\epsilon^{a_3})(\epsilon^{a_2}p_1) -$$
$$- (\epsilon^{a_1}p_2)(\epsilon^a\epsilon^{a_3})(\epsilon^{a_2}p_3) - (\epsilon^a\epsilon^{a_3})(\epsilon^{a_1}\epsilon^{a_2})(p_1p_3) + (\epsilon^{a_2}\Delta_{12})(\epsilon^{a_1}\epsilon^{a_3})(\epsilon^a\Delta_{12}) -$$
$$- (\epsilon^{a_1}p_2)(\epsilon^{a_2}\epsilon^{a_3})(\epsilon^a\Delta_{12}) - (\epsilon^{a_3}p_1)(\epsilon^{a_1}\epsilon^{a_2})(\epsilon^a\Delta_{12})\Big)\frac{1}{\Delta_{12}^2}\Bigg] -$$
$$- (\epsilon^a\epsilon^{a_1})(\epsilon^{a_2}\epsilon^{a_3})C_{abcd}\Bigg] + \text{perms of } (a_1, a_2, a_3). \quad (85)$$

Воспользуемся законом сохранения 4-импульса: $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$. Тогда (85) переписывается в виде:

$$A_4 = ig^2\Bigg[2\Bigg[B^a_{a_1c}B_{ca_2a_3}\Big((\epsilon^a\epsilon^{a_1})(\epsilon^{a_2}p_4)(\epsilon^{a_3}p_2) + 2(\epsilon^a\epsilon^{a_1})(\epsilon^{a_2}p_3)(\epsilon^{a_3}p_2) -$$
$$- (\epsilon^a\epsilon^{a_1})(\epsilon^{a_3}p_4)(\epsilon^{a_2}p_3) - 2(\epsilon^a\epsilon^{a_1})(\epsilon^{a_2}\epsilon^{a_3})(p_2p_3) -$$
$$- (\epsilon^a\epsilon^{a_1})(\epsilon^{a_2}\epsilon^{a_3})(p_2p_4) + (\epsilon^a\epsilon^{a_2})(\epsilon^{a_3}p_2)(\epsilon^{a_1}\Delta_{23}) - (\epsilon^a\epsilon^{a_3})(\epsilon^{a_2}p_3)(\epsilon^{a_1}\Delta_{23}) -$$
$$- (\epsilon^a p_2)(\epsilon^{a_2}\epsilon^{a_3})(\epsilon^{a_1}\Delta_{23}) + (\epsilon^a p_1)(\epsilon^{a_1}\epsilon^{a_2})(\epsilon^{a_3}p_2) - (\epsilon^a p_1)(\epsilon^{a_1}\epsilon^{a_3})(\epsilon^{a_2}p_3) -$$
$$- (\epsilon^a p_1)(\epsilon^{a_1}p_2)(\epsilon^{a_2}\epsilon^{a_3})\Big)\frac{1}{\Delta_{23}^2} + B^a_{ba_3}B_{ba_1a_2}\Big((\epsilon^a\epsilon^{a_1})(\epsilon^{a_3}p_4)(\epsilon^{a_2}p_1) -$$
$$- (\epsilon^a\epsilon^{a_2})(\epsilon^{a_3}p_4)(\epsilon^{a_1}p_2) - (\epsilon^a p_1)(\epsilon^{a_1}\epsilon^{a_2})(\epsilon^{a_3}p_4) + (\epsilon^{a_1}p_3)(\epsilon^a\epsilon^{a_3})(\epsilon^{a_2}p_1) -$$
$$- (\epsilon^{a_1}p_2)(\epsilon^a\epsilon^{a_3})(\epsilon^{a_2}p_3) - (\epsilon^a\epsilon^{a_3})(\epsilon^{a_1}\epsilon^{a_2})(p_1p_3) + (\epsilon^{a_2}\Delta_{12})(\epsilon^{a_1}\epsilon^{a_3})(\epsilon^a\Delta_{12}) -$$
$$- (\epsilon^{a_1}p_2)(\epsilon^{a_2}\epsilon^{a_3})(\epsilon^a\Delta_{12}) - (\epsilon^{a_3}p_1)(\epsilon^{a_1}\epsilon^{a_2})(\epsilon^a\Delta_{12})\Big)\frac{1}{\Delta_{12}^2}\Bigg] -$$
$$- (\epsilon^a\epsilon^{a_1})(\epsilon^{a_2}\epsilon^{a_3})C_{abcd}\Bigg] + \text{perms of } (a_1, a_2, a_3). \quad (86)$$

Выражение (86) выглядит все еще очень громоздко. Попробуем его упростить, выбрав конкретные знаки спиральности и подходящим образом воспользовавшись произволом в выборе векторов поляризации. В качестве примера рассмотрим следующую амплитуду $A_4[1^-, 2^-, 3^+, 4^+]$. А для векторов поляризации выберем такие калибровочные импульсы: $q_1 = q_2 = p_3, q_3 = q_4 = p_2$. Но тогда $\epsilon^{a_1}\epsilon^{a_2} = \epsilon^{a_2}\epsilon^{a_3} = \epsilon^{a_1}\epsilon^{a_3} = \epsilon^{a_2}\epsilon^a = \epsilon^{a_3}\epsilon^a = 0$. Кроме того, нетрудно убедиться, что $\epsilon^{a_3}p_2 = \epsilon^{a_2}p_3 = 0$. Тогда в (86) выживает только одно слагаемое, а именно(подразумевается, что a_i уже упорядочены):

$$A_4[1^-, 2^-, 3^+, 4^+] = 2ig^2(\epsilon^4\epsilon^1)(\epsilon^3p_4)(\epsilon^2p_1)\frac{B^4_{b3}B_{b12}}{\Delta_{12}^2}. \quad (87)$$

Опять же, преобразуя (87) с помощью спирально-спинорных обозначений получим окончательный ответ [15]:

$$A_4[1^-, 2^-, 3^+, 4^+] = ig^2 \frac{\langle 12\rangle^4}{\langle 12\rangle\langle 23\rangle\langle 34\rangle\langle 41\rangle} B_{b3}^4 B_{b12}. \tag{88}$$

Это и есть частный случай формулы Парка-Тейлора для 4-точечной амплитуды в теории Янга-Миллса.

Опять же, чтобы получить полную амплитуду, необходимо просуммировать слагаемые типа (88), в которых необходимо сделать все перестановки индексов 2, 3 и 4.

Мы убедились в том, что формализм решений для древесных амплитуд приводит к правильному результату. Тем не менее, как можно было видеть, решение уже во втором порядке теории возмущений является очень громоздким. Поэтому данный подход технически сложно применить для отыскания амплитуд с большим количеством внешних линий.

Сделаем еще одно замечание: в данном вычислении мы убедились, что вклад в упорядоченную амплитуду дает всего лишь одно слагаемое из (86), если, конечно же, зафиксировать спиральности внешних частиц. Это наталкивает на мысль о том, что, если правильным образом выбрать z_i, то сокращение слагаемых может наступить раньше. Но, к сожалению, это по прежнему не решает проблему связанную с тем, что решение уравнения типа (71) необходимо искать с помощью теории возмущений.

5. Заключение

В данной работе был изучен метод вычисления древесных амплитуд в различных теориях, основанный на решении классических уравнений движения.

Основные результаты работы:

1) Изучена и продемонстрирована схема вычисления древесных амплитуд $1 \to n$ на пороге в скалярной теории, показано, каким образом задача вычисления древесных амплитуд может быть сведена к решению классических уравнений движения на поля теории.

2) Техника вычисления амплитуд на пороге была обобщена на случай за порогом. Схема нахождения амплитуд за порогом была продемонстрирована на примере рассеяния $1 \to n$ в теории ϕ^4. Также показано, что данная схема при выборе пороговой кинематики ($p_i = (\omega, \vec{0})$) сводится к пороговой схеме.

3) Разработанная схема вычисления амплитуд за порогом была применена для нахождения древесных амплитуд для рассеяния $2 \to n$ в теории ϕ^4. Показано, что при $n > 4$ все амплитуды равны нулю, а ответ для рассеяния $2 \to 4$ совпадает с известным.

4) Изучена неабелева калибровочная теория Янга-Миллса с калибровочной группой $SU(N)$. Для данной теории была построена схема вычисления древесных амплитуд с помощью решения классического уравнения движения.

5) Схема нахождения древесных амплитуд в теории Янга-Миллса была продемонстрирована на вычислении 3-частичных и 4-частичных амплитуд. Полученные ответы совпали с формулой Парка-Тейлора, а также было замечено, что при определенном выборе калибровочных импульсов в векторах поляризации процедура нахождения ответа для амплитуды сильно упрощается.

6. Приложение

6.1. Приложение A. Пропагатор

Сделаем некоторое замечание по поводу функций Грина. Пусть по определению функцией Грина называется решение уравнения:

$$(\partial^2 + m^2)G(x) = \delta(x).$$

Отсюда следует, что причинная функция Грина имеет вид:

$$G(x-y) = -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \tag{89}$$

И тогда двухточечный коррелятор в свободной теории связан с полученной функций Грина:

$$\langle 0|\, T(\phi(x)\phi(y))\, |0\rangle = (-i)G(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{ie^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = D_F(x-y). \tag{90}$$

6.2. Приложение B. Выделение несвязных слагаемых

В данном разделе более подробно обсудим вопрос о выделении несвязных частей в выражении для амплитуды.

Итак, используя определение (18) n–точечная амплитуда (1) в произвольной скалярной теории имеет вид:

$$A_n = (-i)^n \lim_{p_i^2 \to m^2} \prod_{i=1}^{n}(p_i^2 - m^2) \int d^4x_1 ... d^4x_n e^{ip_1x_1 + ... + p_nx_n} \times$$
$$\times \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_1)} \times ... \times \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_{n-1})}\left[\phi^j(x_n)Z[j]\right]\Bigg|_{j=0}. \tag{91}$$

Также из [13] известно общее выражение для производящего функционала в теории с взаимодействием:

$$Z[j] = exp\left[-i\int d^4xV\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x)}\right)\right]exp\left[\frac{i}{2}\int d^4xd^4yj(x)G(x-y)j(y)\right]. \tag{92}$$

Все формулы выше были справедливы для произвольной скалярной теории. Далее мы приведем рассуждения для рассматриваемой нами теории ϕ^4. Тем не менее, вычисления для любой другой теории со скалярными полями будут схожи.

Разложим (92) по теории возмущений явно до первого порядка:

$$Z[j] = \Bigg(1 - i\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\Bigg[-3iG^2(0) - 6iG(0)(\phi_0^j)^2(x) + \phi_0^{j\,4}(x)\Bigg] + \\ + \mathcal{O}(\lambda^2)\Bigg)Z_0[j], \qquad (93)$$

где $Z_0[j] = exp\Bigg[\frac{i}{2}\int d^4xd^4yj(x)G(x-y)j(y)\Bigg]$.

В таком случае, в первом порядке теории возмущений в древесном приближении найдем $\phi^j(x)$:

$$\phi^j(x) = \phi_0^j(x) - \frac{\lambda}{6}\int d^4yG(x-y)\phi_0^{j\,3}(x) + \mathcal{O}(\lambda^2). \qquad (94)$$

И во всех формулах $\phi_0^j(x) = \displaystyle\int d^4yG(x-y)j(y)$.

Чтобы проще понять, как действует $n-1$ вариационная производная в (91) рассмотрим случай $n=4$:

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_1}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_2}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_3}\Bigg[\phi^j(x_4)Z[j]\Bigg] = \left(\frac{1}{i}\right)^3\frac{\delta}{\delta j_1}\frac{\delta}{\delta j_2}\frac{\delta}{\delta j_3}(\phi^j(x_4))Z[j] + \\ + \left(\frac{1}{i}\right)^2\frac{\delta}{\delta j_1}\frac{\delta}{\delta j_3}\phi^j((x_4))\phi^j(x_2)Z[j] + \left(\frac{1}{i}\right)^2\frac{\delta}{\delta j_3}(\phi^j(x_4))\frac{\delta}{\delta j_1}(\phi^j(x_2))Z[j] + \\ + \left(\frac{1}{i}\right)\frac{\delta}{\delta j_3}(\phi^j(x_4))\phi^j(x_1)\phi^j(x_2)Z[j] + \left(\frac{1}{i}\right)^2\frac{\delta}{\delta j_1}\frac{\delta}{\delta j_2}\phi^j((x_4))\phi^j(x_3)Z[j] + \\ + \left(\frac{1}{i}\right)^2\frac{\delta}{\delta j_2}(\phi^j(x_4))\frac{\delta}{\delta j_1}(\phi^j(x_3))Z[j] + \left(\frac{1}{i}\right)\frac{\delta}{\delta j_2}(\phi^j(x_4))\phi^j(x_1)\phi^j(x_3)Z[j] +$$

$$+\left(\frac{1}{i}\right)^2\frac{\delta}{\delta j_1}\frac{\delta}{\delta j_2}\phi^j((x_3))\phi^j(x_4)Z[j]+\left(\frac{1}{i}\right)^2\frac{\delta}{\delta j_2}(\phi^j(x_3))\frac{\delta}{\delta j_1}(\phi^j(x_4))Z[j]+$$
$$+\left(\frac{1}{i}\right)\frac{\delta}{\delta j_2}(\phi^j(x_3))\phi^j(x_1)\phi^j(x_4)Z[j]+\left(\frac{1}{i}\right)\frac{\delta}{\delta j_1}(\phi^j(x_2))\phi^j(x_3)\phi^j(x_4)Z[j]+$$
$$+\left(\frac{1}{i}\right)\frac{\delta}{\delta j_1}(\phi^j(x_3))\phi^j(x_2)\phi^j(x_4)Z[j]+\left(\frac{1}{i}\right)\frac{\delta}{\delta j_1}(\phi^j(x_4))\phi^j(x_2)\phi^j(x_3)Z[j]+$$
$$+\phi^j(x_1)\phi^j(x_2)\phi^j(x_3)\phi^j(x_4)Z[j]. \tag{95}$$

При стремлении $j \to 0$ остаются 4 слагаемых, поскольку из (94) $\phi^j_0(x)=0$. А именно:

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_1}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_2}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_3}\left[\phi^j(x_4)Z[j]\right]\Bigg|_{j=0}=\left(\frac{1}{i}\right)^3\frac{\delta}{\delta j_1}\frac{\delta}{\delta j_2}\frac{\delta}{\delta j_3}(\phi^j(x_4))+$$
$$+\left(\frac{1}{i}\right)^2\frac{\delta}{\delta j_3}(\phi^j(x_4))\frac{\delta}{\delta j_1}(\phi^j(x_2))+\left(\frac{1}{i}\right)^2\frac{\delta}{\delta j_2}(\phi^j(x_4))\frac{\delta}{\delta j_1}(\phi^j(x_3))+$$
$$+\left(\frac{1}{i}\right)^2\frac{\delta}{\delta j_2}(\phi^j(x_3))\frac{\delta}{\delta j_1}(\phi^j(x_4)). \tag{96}$$

Диаграммное представление этого выражения изображено на Рис.1:

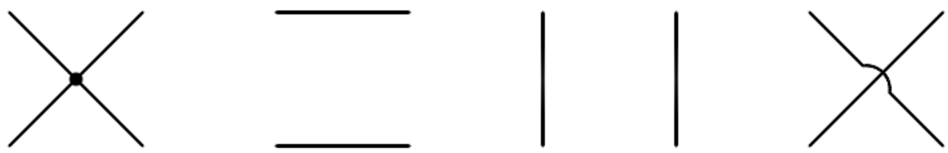

Рис.1 Диаграммное представление

Таким образом заключаем, что вклад в амплитуду дает лишь первое слагаемое, а все остальные являются несвязными частями.

Отсюда сразу можно сделать вывод, что при расчете n–точечной амплитуды по формуле (91) при n – нечетном интересующая нас часть с производными имеет вид:

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_1)}\times ... \times\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_{n-1})}\phi^j(x_n)\Bigg|_{j=0}. \tag{97}$$

При четном числе ног отличными от нуля являются слагаемые, в которых на каждое поле падает ровно по одной производной, которые при варьировании дадут пропагатор:

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_1)}\times ... \times\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_{n-1})}\phi^j(x_n)\Big|_{j=0}+\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_1)}\phi^j(x_2)\times$$
$$\times ... \times\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_{n-1})}\phi^j(x_n)\Big|_{j=0}+(\text{all transpositions}). \qquad (98)$$

Таким образом, мы показали, что для расчета амплитуд необходимо учитывать только слагаемое с производными по $\phi^j(x)$, а слагаемые с производными по производящему функционалу либо зануляются при аннулировании источника, либо являются несвязными кусками в амплитуде.

6.3. Приложение C. Спинорно-спиральный формализм

Приведем некоторые сведения, касающиеся спинорно-спирального формализма, который мы используем для удобной записи амплитуд в теории Янга-Миллса. Данный раздел целиком опирается на обзор [17], в котором подробно разбирается данный формализм.

Рассмотрим безмассовое спинорное поле, которое удовлетворяет уравнению Вейля: $i\gamma^\mu\partial_\mu\psi = 0$. Общее решение этого уравнения, как известно, записывается в виде:

$$\psi(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_{s=\pm}\left(a^s_{\vec{p}}u_s(p)e^{-ipx}+b^{s\dagger}_{\vec{p}}v_s(p)e^{ipx}\right), \qquad (99)$$

где $u_s(p)$ и $v_s(p)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\gamma^\mu p_\mu v_\pm=0 \qquad \gamma^\mu p_\mu u_\pm=0 \qquad \bar{u}_\pm\gamma^\mu p_\mu=0 \qquad \bar{v}_\pm\gamma^\mu p_\mu=0, \qquad (100)$$

и $\bar{u}_\pm = u^\dagger_\pm\gamma^0$. Индекс $\pm$ для безмассовых фермионов соответствует двум значениям спиральности. Согласно правилам Фейнмана $\bar{u}_\pm$ – выходящие из диаграммы фермионы со спиральностью ±1 соответственно а, $v_\pm$ – выходящие из диаграммы антифермионы со спиральностью ±1. В силу кроссинг-симметрии все остальные решения выражаются через данные:

$$\bar{v}_\pm=\bar{u}_\mp, \qquad u_\pm=v_\mp. \qquad (101)$$

Введем обозначения для четырехкомпонентных решений $v_\pm$ и $\bar{u}_\pm$:

$$\bar{u}_-(p) = (0, \langle p|_{\dot{a}}) \qquad \bar{u}_+(p) = ([p|^a, 0), \tag{102}$$

$$v_+(p) = \begin{pmatrix} |p]_a \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_-(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ |p\rangle^{\dot{a}} \end{pmatrix}. \tag{103}$$

Треугольные и квадратные скобки являются двухкомпонентными спинорами.

В таких обозначениях уравнения Вейля имеют вид:

$$p^{\dot{a}b}|p]_b = 0, \qquad p_{a\dot{b}}\,|p\rangle^{\dot{b}} = 0, \qquad [p|^b p_{b\dot{a}} = 0, \qquad \langle p|_{\dot{b}}\, p^{\dot{b}a} = 0, \tag{104}$$

причем $p_{a\dot{b}} = p_\mu(\sigma^\mu)_{a\dot{b}}$, а поднимание и опускание индексов производится с помощью символа Леви-Чевиты ε^{ab}.

Далее приведем без доказательств основные соотношения, которые используются для записи амплитуд.

1) Произведение спиноров:

$$\bar{u}_+(p_1)v_-(p_2) = 0; \qquad \bar{u}_-(p_1)v_-(p_2) = \langle 1|_{\dot{a}}\,|2\rangle^{\dot{a}} = \langle 12\rangle = -\langle 21\rangle. \tag{105}$$

$$\bar{u}_-(p_1)v_+(p_2) = 0; \qquad \bar{u}_+(p_1)v_+(p_2) = [1|^a|2]_a = [12] = -[21]. \tag{106}$$

2) Квадрат модуля суммы импульсов ($p_i^2 = 0$):

$$(p+q)^2 = 2pq = -\langle pq\rangle[pq] \tag{107}$$

3) Тождество Фирца:

$$\langle 1|\,\gamma^\mu|2]\,\langle 3|\,\gamma_\mu|4] = -2\langle 13\rangle[24]. \tag{108}$$

4) Свертка с импульсом:

$$\langle 1|\,\gamma^\mu|2]p_\mu = \langle 1p\rangle[p2]. \tag{109}$$

5) Тождество Шутена:

$$\langle pq\rangle\langle rs\rangle + \langle ps\rangle\langle qr\rangle + \langle pr\rangle\langle sq\rangle = 0. \tag{110}$$

Помимо этого, вектора поляризации для векторных полей могут быть записаны в спинорно-спиральном формализме как:

$$\epsilon_+^\mu(p,q) = -\frac{\langle q|\,\gamma^\mu|p]}{\sqrt{2}\langle qp\rangle}, \qquad \epsilon_-^\mu(p,q) = -\frac{\langle p|\,\gamma^\mu|q]}{\sqrt{2}[qp]}. \tag{111}$$

Наличие в формулах для векторов поляризации некоторого произвольного импульса q^μ связано с калибровочной инвариантностью теории. Его можно выбирать удобным для конкретного вычисления образом, главное, чтобы сам вектор q^μ был отличен от нуля.

Литература

1. H. Lehmann, K. Symanzik, and W. Zimmerman – Zur Formulierung quantisierter Feldtheorien, Nuovo Cimento 1(1), 205 (1955).

2. Brown L.S. – Summing tree graphs at threshold. Phys.Rev., 1992, vol.D46, p.4125.

3. Либанов М.В., Рубаков В.А., Троицкий С.В. – Многочастичные процессы и квазиклассика в бозонных теориях поля. "Физика элементарных частиц и атомного ядра" 1997, том 28, вып.3.

4. Smith B.H. – Summing one-loop graphs at multiparticle threshold, Phys.Rev., 1993, vol.D47, p.3521.

5. M.V. Libanov, V.A. Rubakov, S.V. Troitsky – Tree amplitudes at multiparticle threshold in a model with softly broken 0(2) symmetry, Nucl.Phys.B 412, 1994, p.607.

6. Voloshin M.B. – Multiparticle amplitudes at zero energy and momentum in scalar theory. Nuclear Physics, 1992, B383, 233-248.

7. Voloshin M.B. – Comment on “Summing one-loop graphs at multi-particle threshold”. TPI-MINN-92/46-T September 1992

8. Brown L.S., Cheng-Xing Zhai – $2 \to$ n threshold production at tree level. Phys.Rev., 1993, vol.D47, p.5526.

9. Voloshin M.B. – Summing one-loop graphs at multi-particle threshold. Phys.Rev., 1993, vol.D47, p.357.

10. Пескин М.Е., Шрёдер Д.В. – Введение в Квантовую теорию поля.

11. Райдер Л. – Квантовая теория поля.

12. Argyres E.N., Kleiss R.H.P., Papadopulos C.G. – Amplitude estimates for multi-Higgs production at high energies , Nucl. Phys., 1993, vol B391 p.42; Nucl. Phys., 1993, vol B391 p.57.

13. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. – Введение в квантовую теорию калибровочных полей.

14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. – Теоретическая физика, Том 3, Квантовая механика.

15. M. Srednicki, Quantum field theory, Cambridge, UK: Univ. Pr. (2007) p.641.

16. Рубаков В.А. – Классические калибровочные поля. Бозонные теории. (2005)

17. Elvang H., Huang Y. – Scattering Amplitudes in Gauge Theory and Gravity, Cambridge University Press, 2015.

18. Feng B., Wang J., Wang Y. and Zhang Z. – BCFW Recursion Relation with Nonzero Boundary Contribution," JHEP 1001, 019 (2010).

19. H. Goldberg – Breakdown of perturbation theory at tree level in theories with scalars, Phys. Lett., vol. B246 (1990) p.445.

20. Ициксон К., Зюбер Ж.К. – Квантовая теория поля (1984) 7

21. Бейтмен Г., Эрдейи А. – Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М. (1966).